

Operiamo con i vettori: prodotto scalare **vs** prodotto vettoriale

PRODOTTO TRA VETTORI

Introduzione:

In un'altra lezione abbiamo parlato di somma e differenza tra vettori.

Oggi vediamo come eseguire il loro prodotto!

Abbiamo due possibilità:

PRODOTTO SCALARE



OTTENIAMO UNO SCALARE

(il prodotto scalare, come dice il termine stesso,
mi restituisce come risultato uno scalare)

PRODOTTO VETTORIALE



OTTENIAMO UN VETTORE

(il prodotto vettoriale, come dice il termine stesso,
mi restituisce come risultato un vettore)

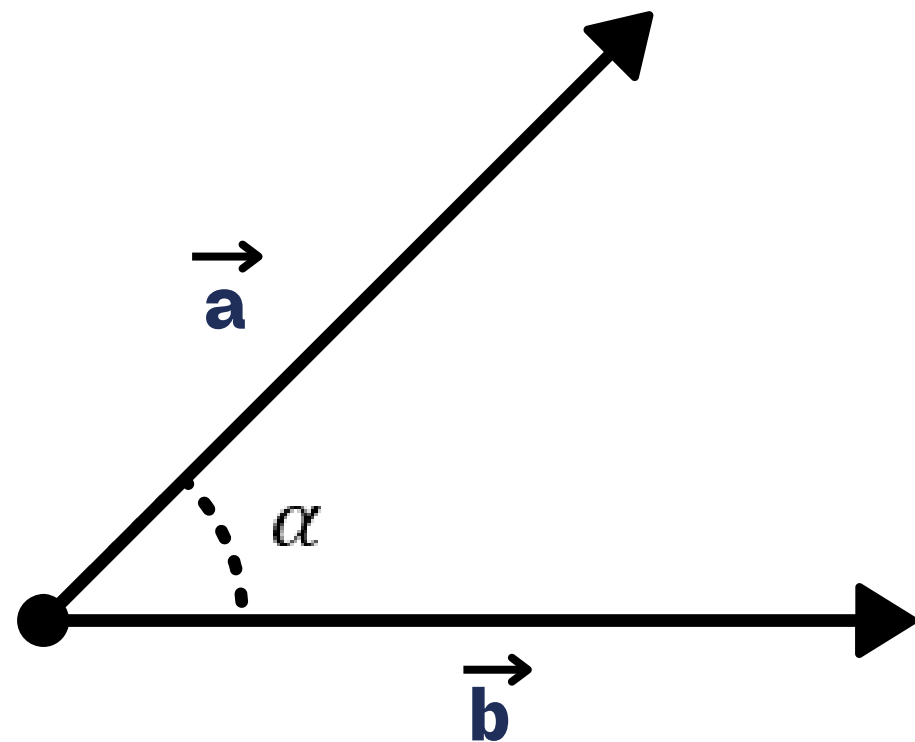


PRODOTTO SCALARE

PRODOTTO SCALARE

Definizione:

Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ed indichiamo con α l'angolo compreso tra di essi.



Indichiamo il **prodotto scalare** tra i due vettori nel seguente modo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c$$

Si legge: “**a** scalare **b** uguale a **c**”, dove **c** è uno scalare (un numero)!

PRODOTTO SCALARE

Definizione:

Abbiamo, quindi, capito che il prodotto scalare tra due vettori NON è un vettore, **bensì uno scalare (un numero)!!!**

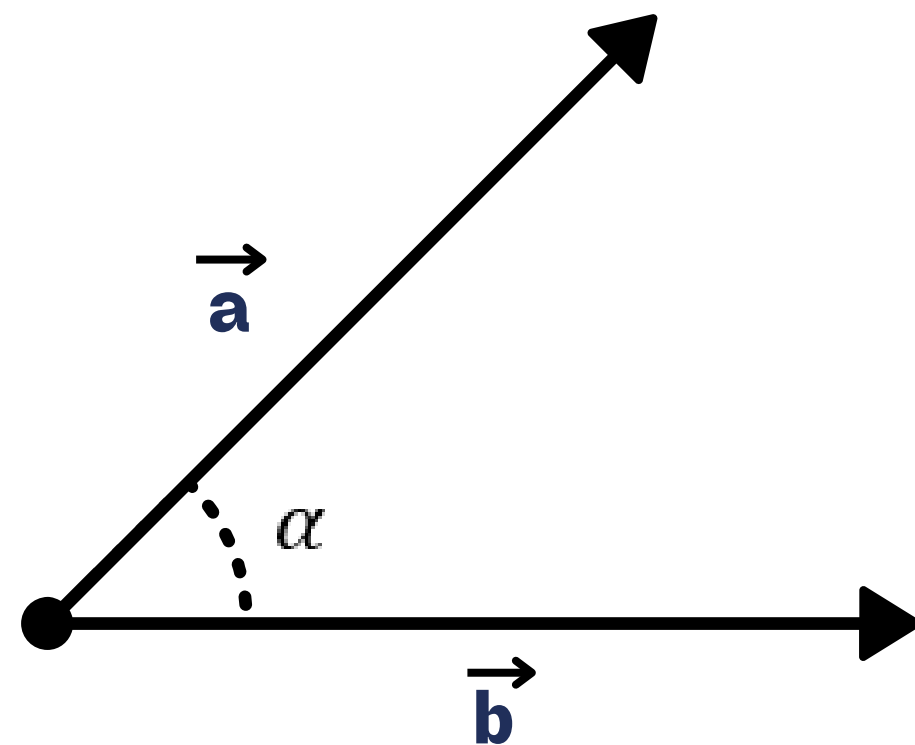
Ma quanto vale questo numero? Quanto vale quello che abbiamo indicato con “c”?

Diamo una definizione più precisa di prodotto scalare...

PRODOTTO SCALARE

Definizione:

Il prodotto scalare tra due vettori è pari al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso tra di essi:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha$$

modulo del
primo vettore

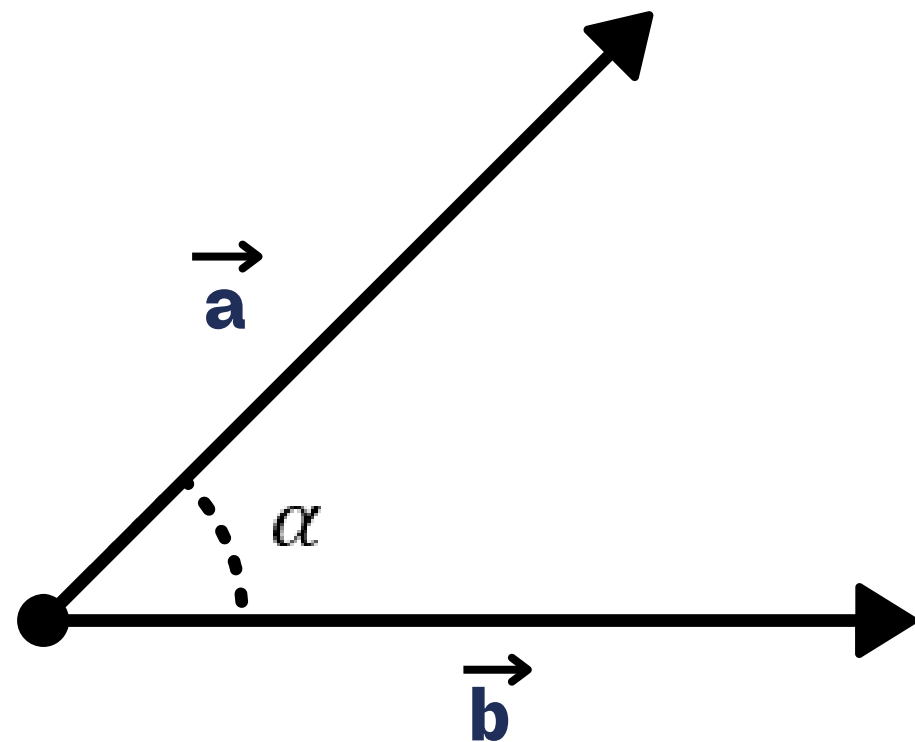
modulo del
secondo vettore

Non entreremo nel merito di cosa sia esattamente, ma per ora accontentiamoci di sapere che è un numero!

PRODOTTO SCALARE

Esempio:

Supponiamo di avere due vettori con le seguenti caratteristiche:



$$a = 5 \quad \text{modulo di } \vec{a}$$

$$b = 4 \quad \text{modulo di } \vec{b}$$

$$\cos \alpha = 0,5 \quad \text{coseno dell'angolo}$$

Applicando la formula si ottiene:

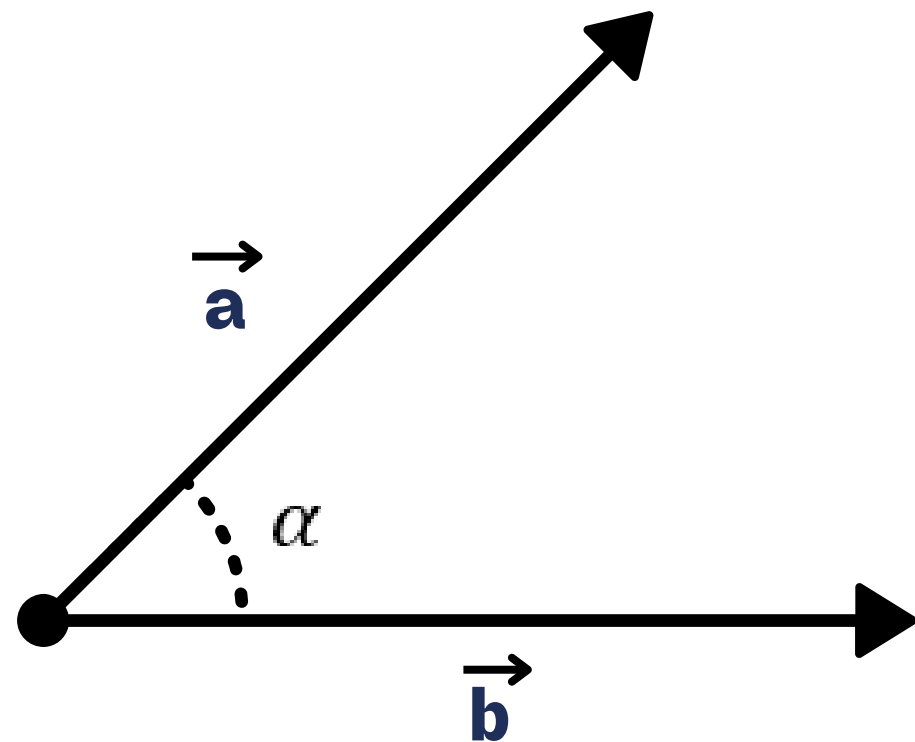
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha = 5 \cdot 4 \cdot 0,5 = 10$$

PRODOTTO VETTORIALE

PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ed indichiamo con α l'angolo compreso tra di essi.



Indichiamo il **prodotto vettoriale** tra i due vettori nel seguente modo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

ATTENZIONE:

Si usa il simbolo "x" per distinguerlo dal prodotto scalare

Si legge: "**a** vettor **b** uguale a **c**", dove **c** questa volta è un vettore (ATTENZIONE)!

PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Se $\vec{c}$ è un vettore, non basta definirne il modulo...!!! **Dobbiamo definire anche la sua direzione e il suo verso!!!**

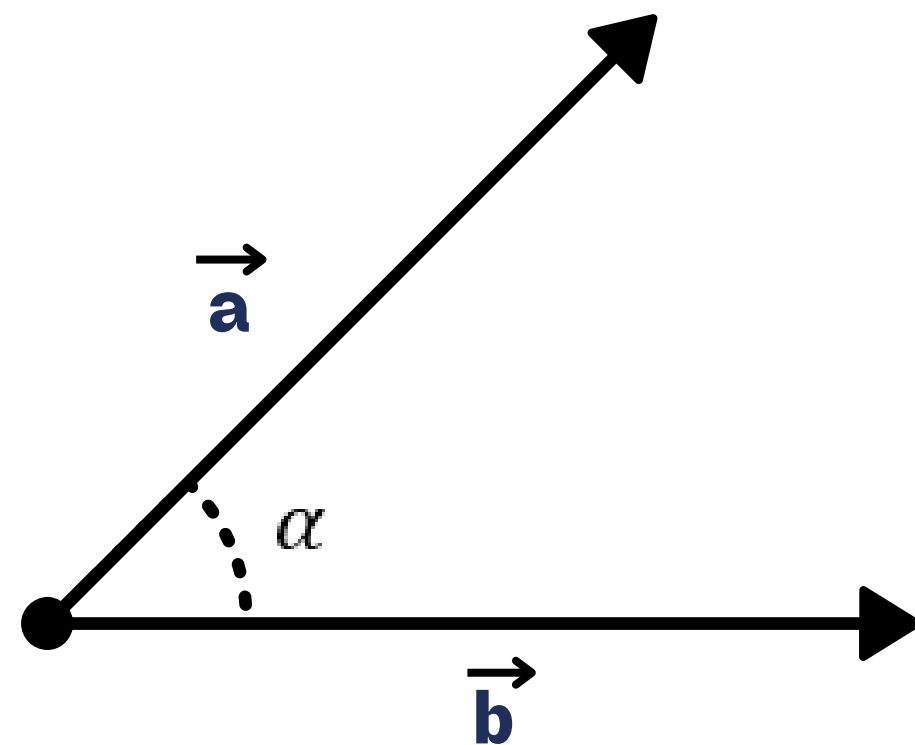
Ma andiamo per gradi...

Partiamo dal modulo!

PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Il modulo del prodotto vettoriale tra due vettori è pari al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il seno dell'angolo compreso tra di essi:



$$\vec{a} \times \vec{b} = a b \sin \alpha$$

modulo del
primo vettore

modulo del
secondo vettore

Non entreremo nel merito di cosa sia esattamente, ma per ora accontentiamoci di sapere che è un numero!

PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

ATTENZIONE!!!

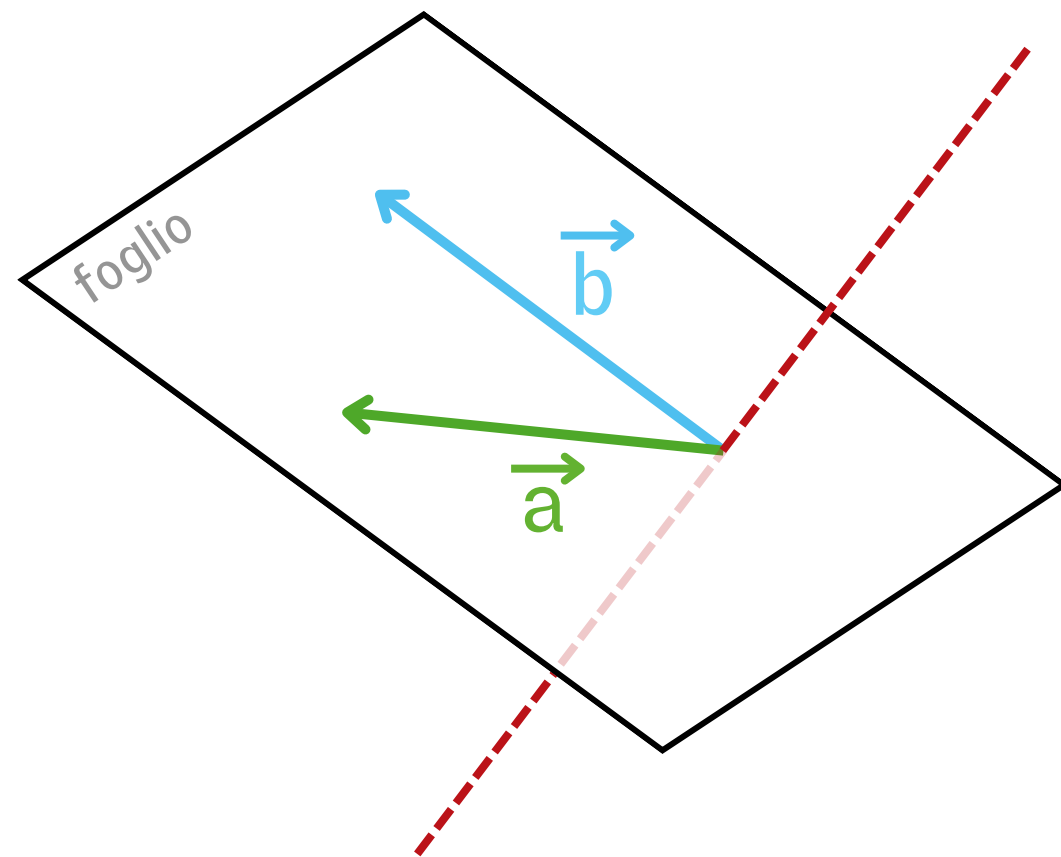
Questa volta non possiamo accontentarci di valutare il modulo (l'abbiamo detto un attimo fa)!!!

Dobbiamo valutare direzione e verso di $\vec{c}$!!!

PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Per quanto riguarda la **direzione**, non ci sono grosse difficoltà: la direzione, infatti, è **perpendicolare al piano** che contiene i due vettori!



Nel nostro caso, la direzione è perpendicolare al nostro foglio!

PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

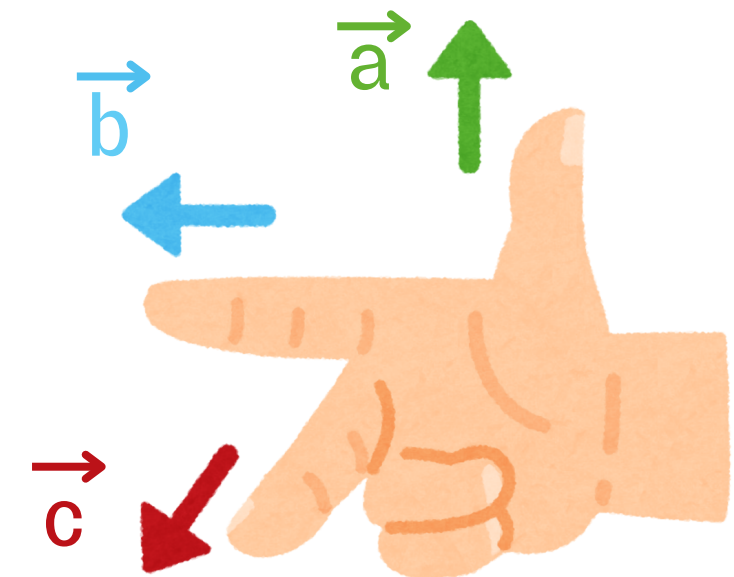
Per quanto riguarda il verso, dobbiamo applicare la cosiddetta regola della mano destra! Abbiamo diverse modalità per farlo...

Un modo è quello di posizionare le dita della mano destra in questo modo:

- il pollice nel verso del primo vettore;
- l'indice nel verso del secondo vettore.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Il dito medio indicherà il verso del vettore prodotto!



PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Un altro modo per applicare la regola della mano destra (forse anche più semplice) è il seguente...

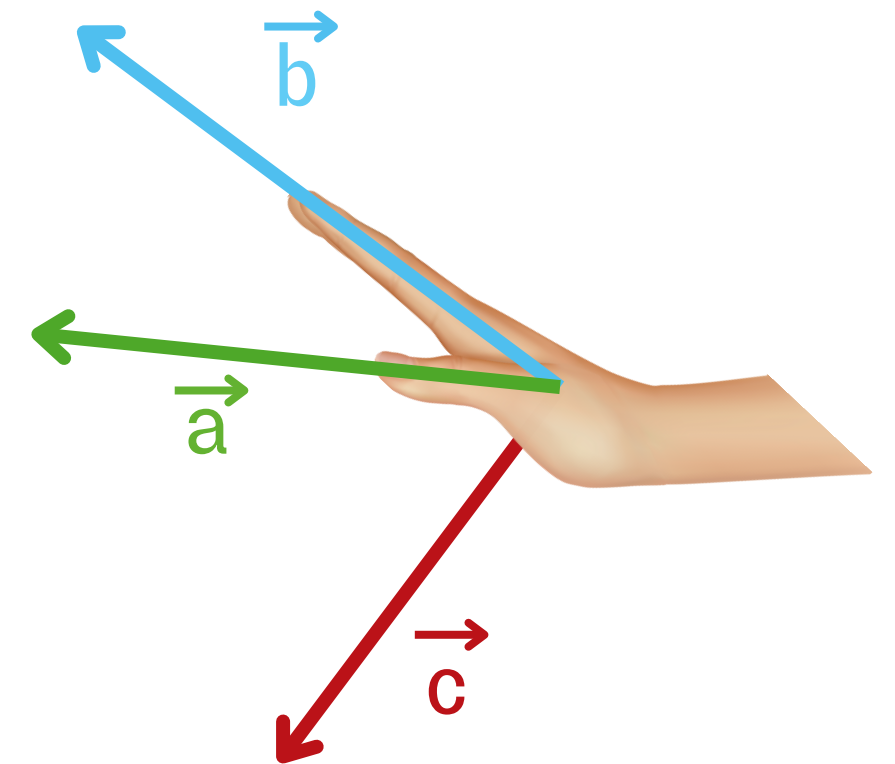
Posizioniamo la mano destra in questo modo:

- il pollice nel verso del primo vettore;
- tutte le altre dita nel verso del secondo vettore.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Il palmo della mano indicherà il verso del vettore prodotto!

Il vettore prodotto, infatti, sarà sempre uscente dal palmo!

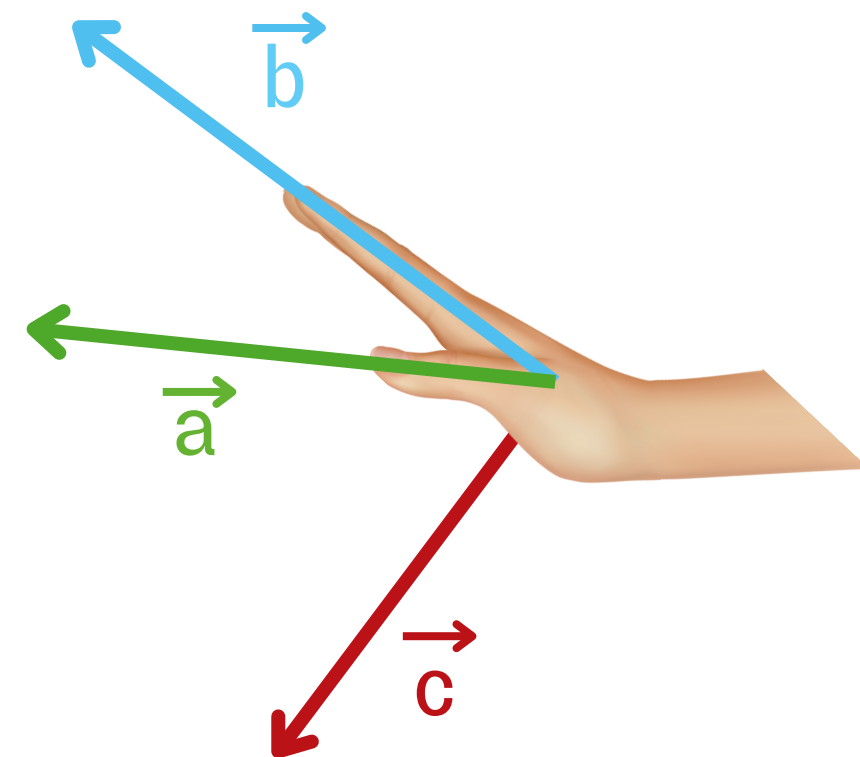
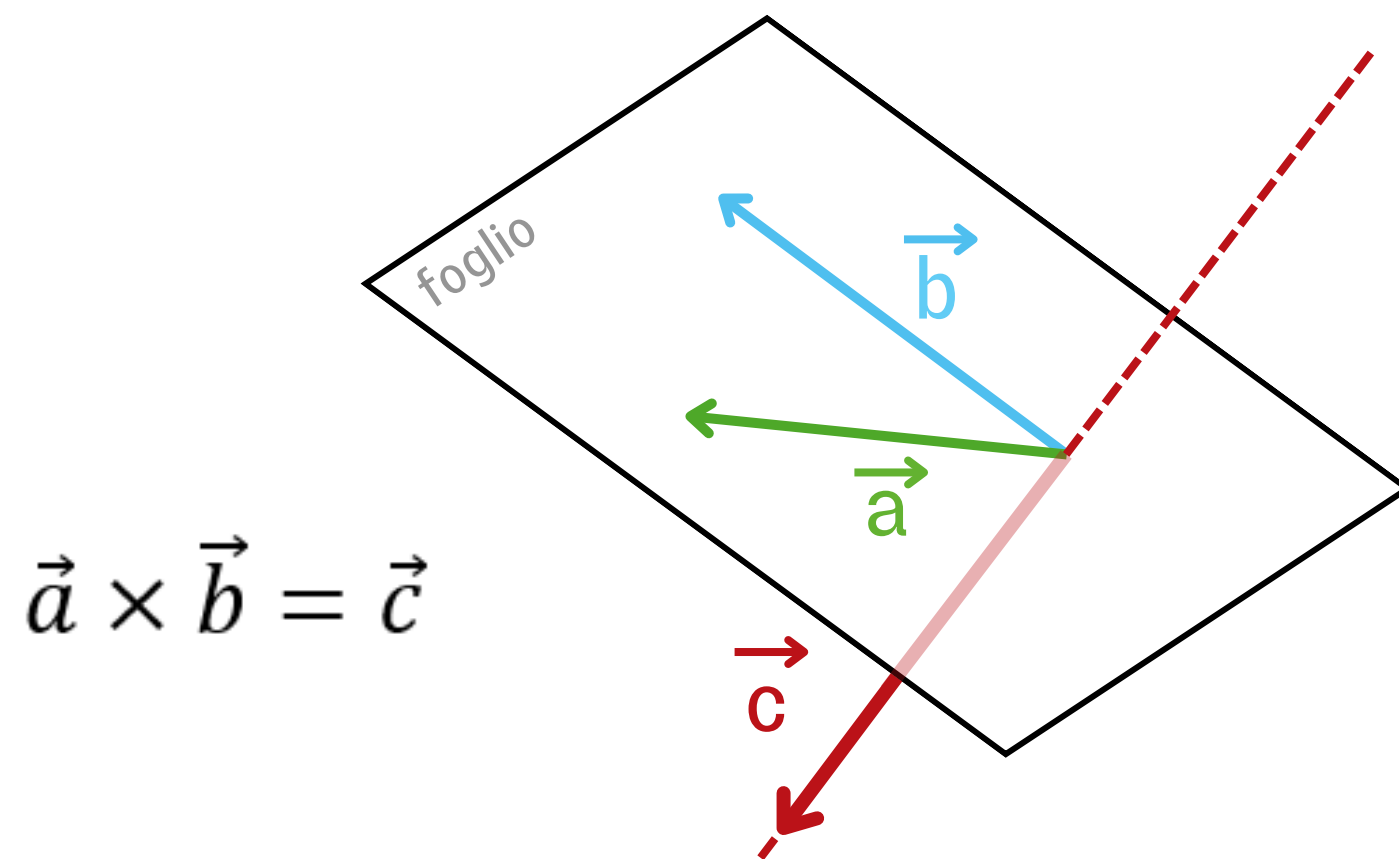


PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Torniamo al nostro foglio ed applichiamo questo secondo metodo.

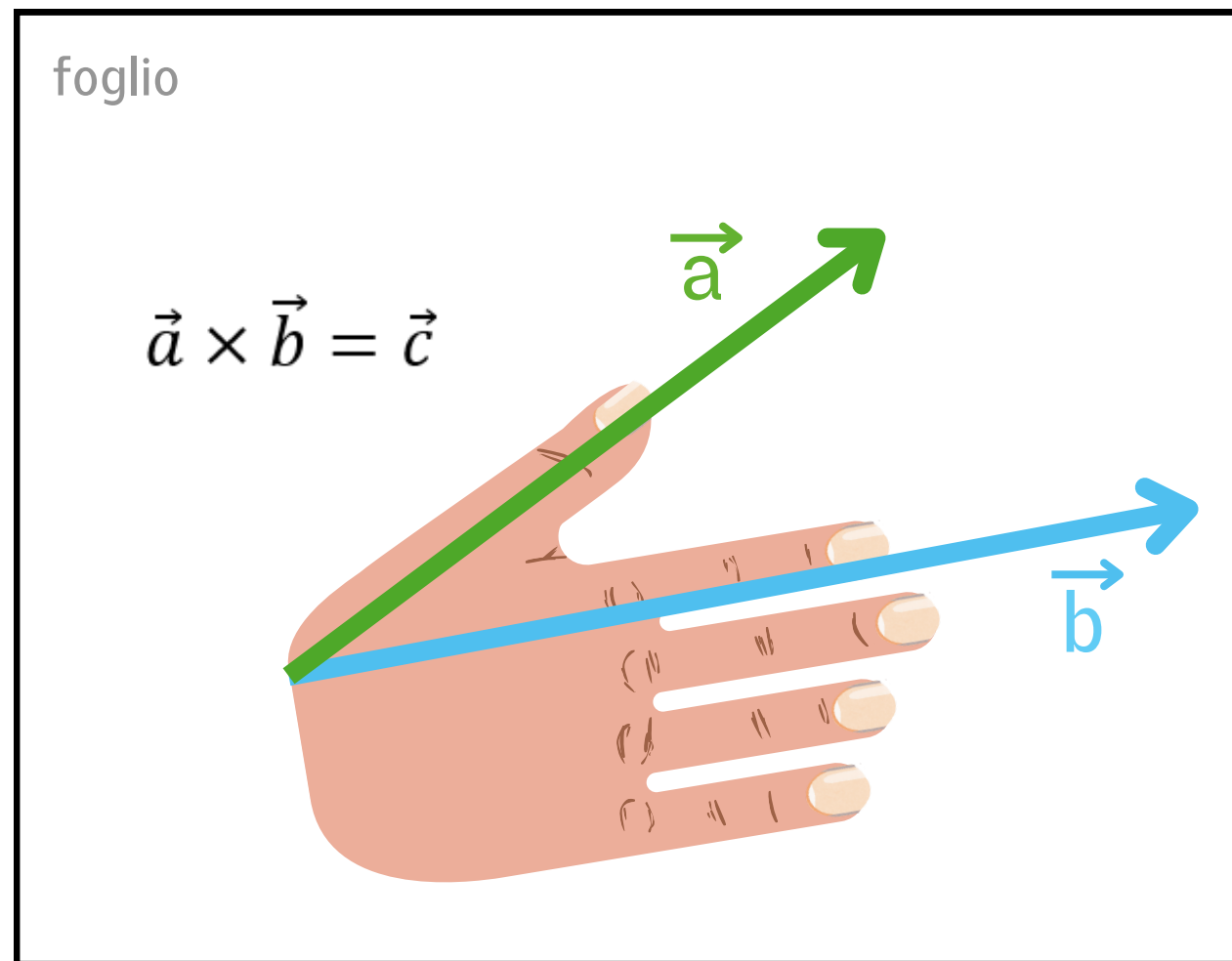
Si vede immediatamente che il verso del vettore prodotto è quello indicato in figura: **entrante nel foglio!**



PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Applichiamo il procedimento guardando il nostro foglio dall'alto:



Il palmo della mano è rivolto verso il foglio, quindi il vettore prodotto sarà **entrante nel foglio!**

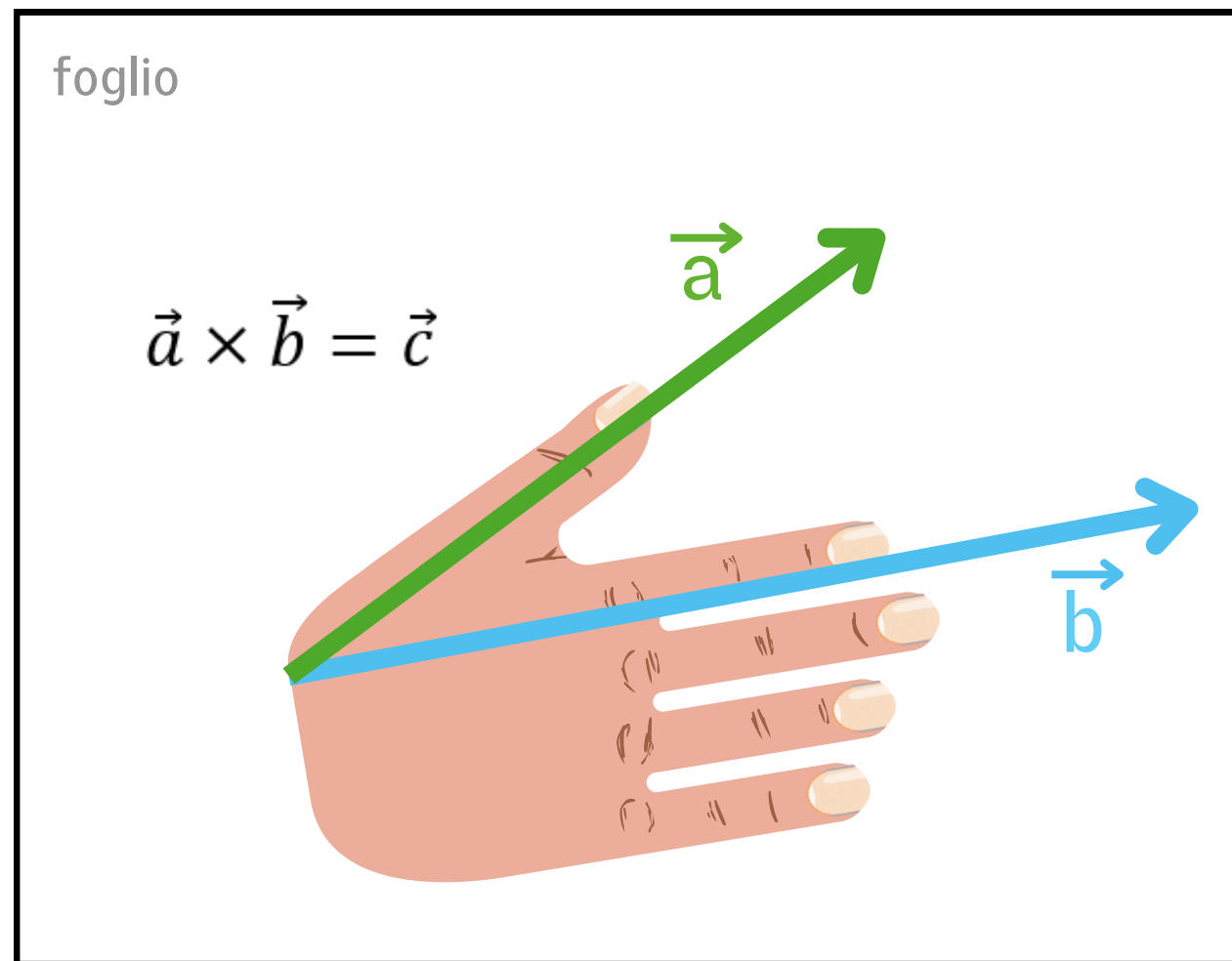
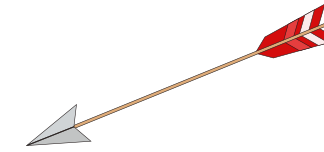
Ma come lo rappresentiamo sul foglio?

Essendo perpendicolare al foglio, non possiamo rappresentarlo come gli altri due...

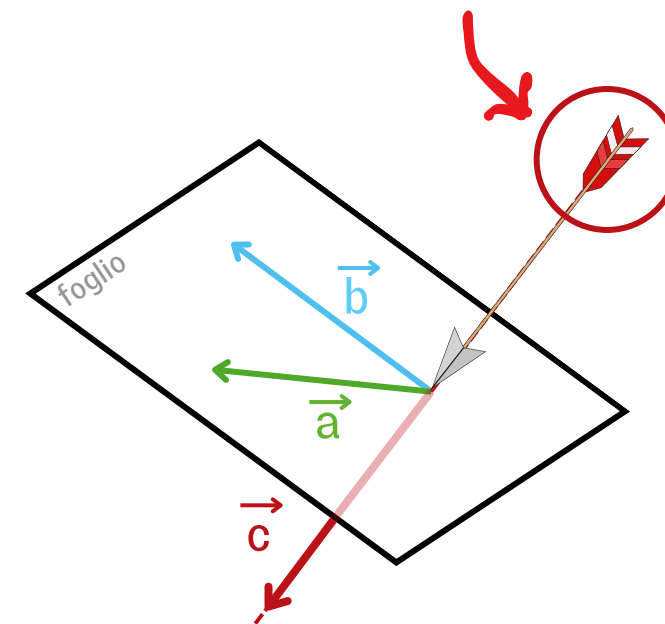
PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Immaginiamo allora che il nostro vettore sia una freccia...



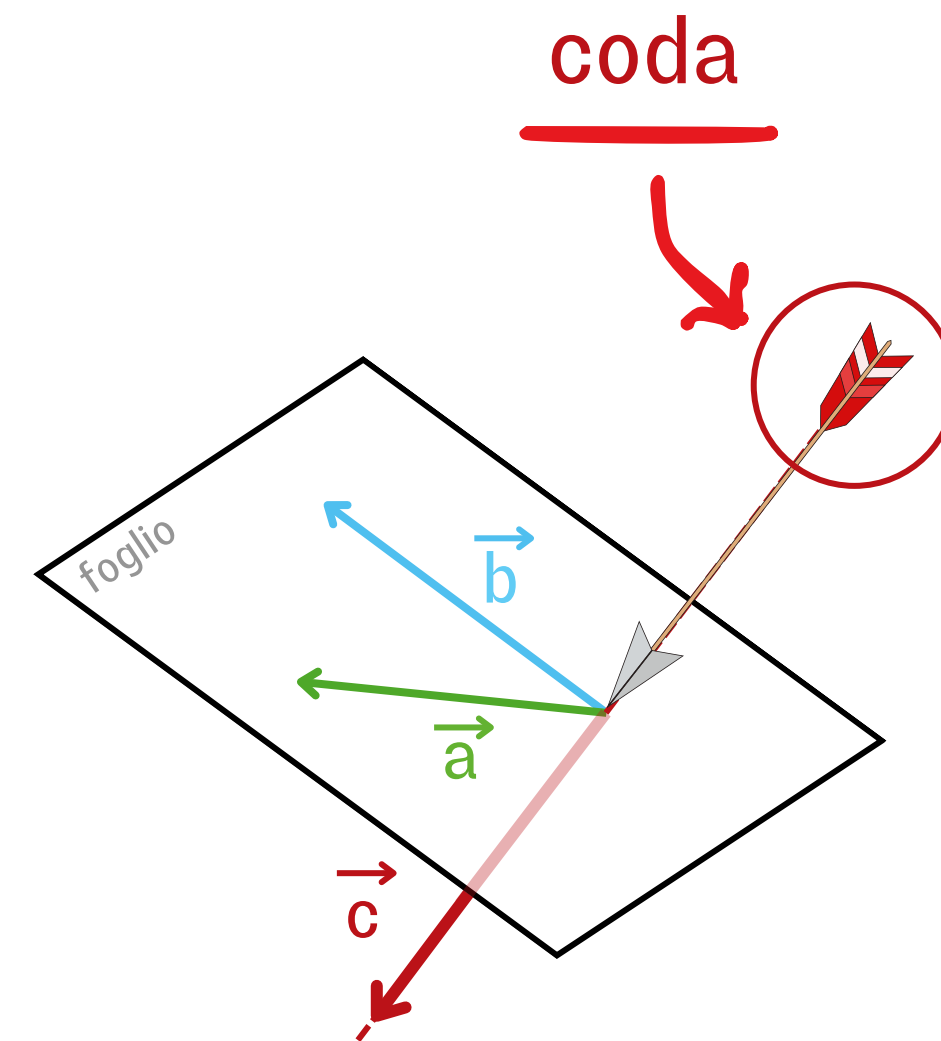
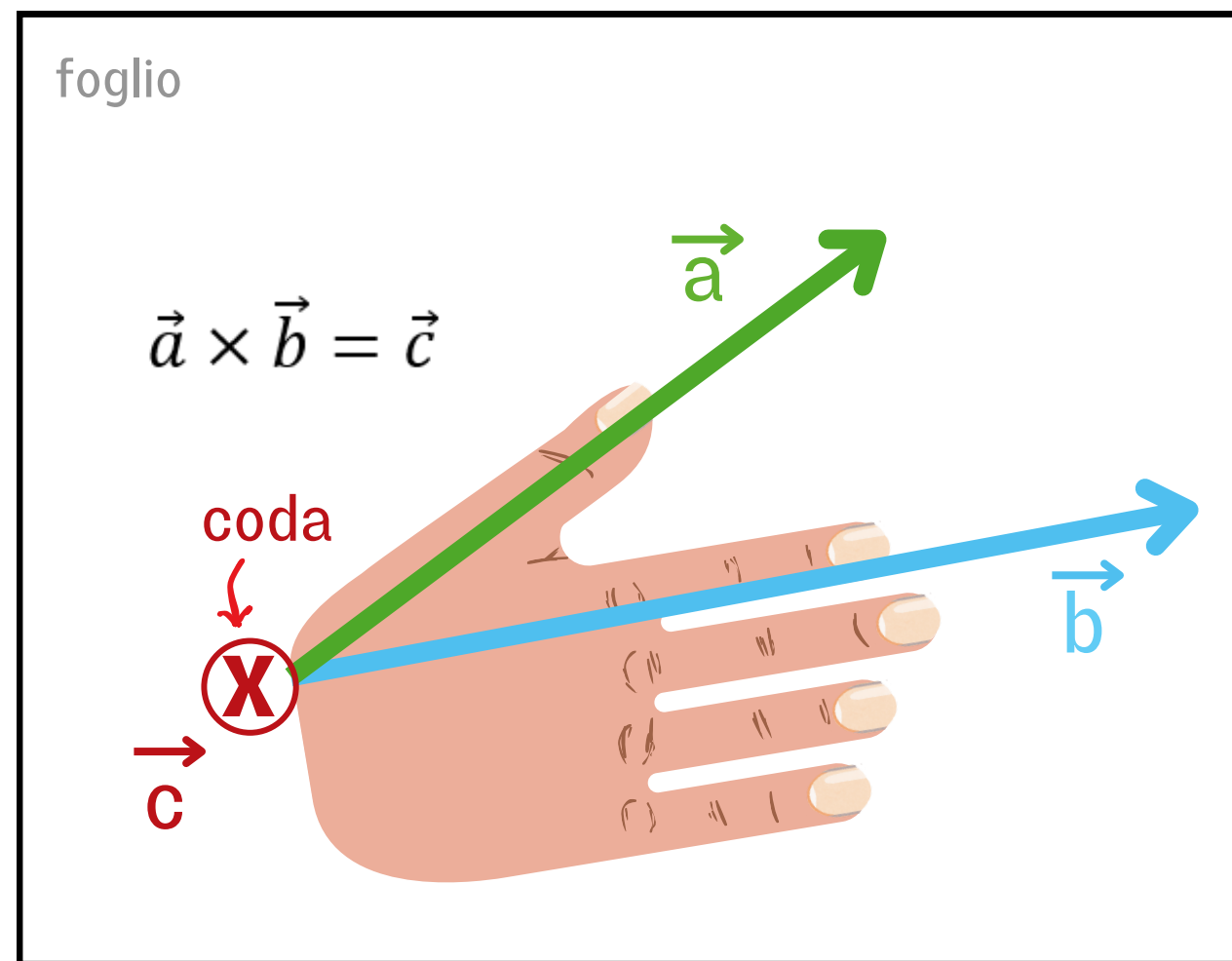
Sappiamo che questa freccia è perpendicolare al foglio ed è entrante... quindi se guardiamo il foglio dall'alto vedremo la sua coda!



PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

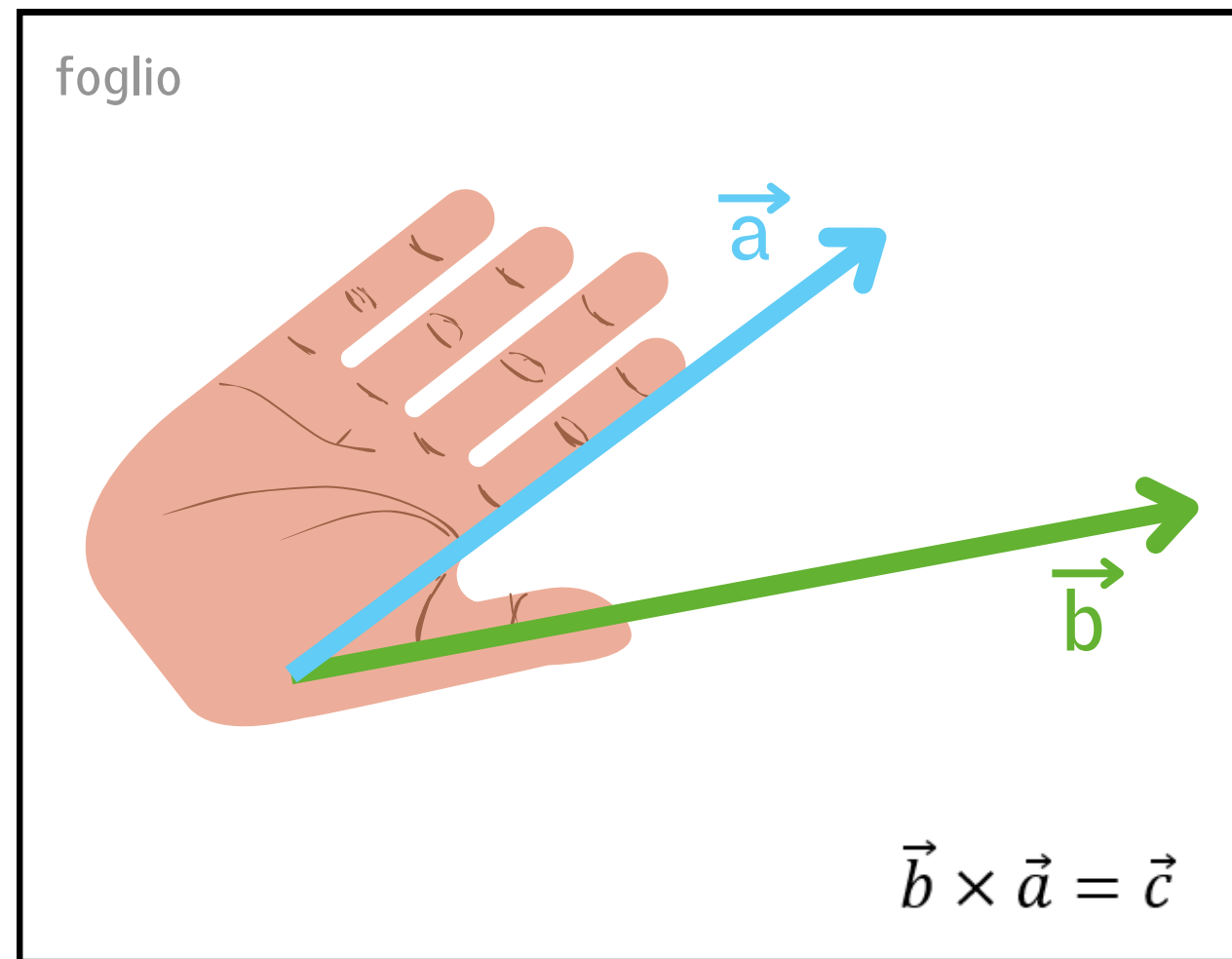
Rappresenteremo la coda con una "X":



PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Proviamo adesso a calcolare $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$. Otterremo lo stesso risultato?



Riposizioniamo la mano destra:

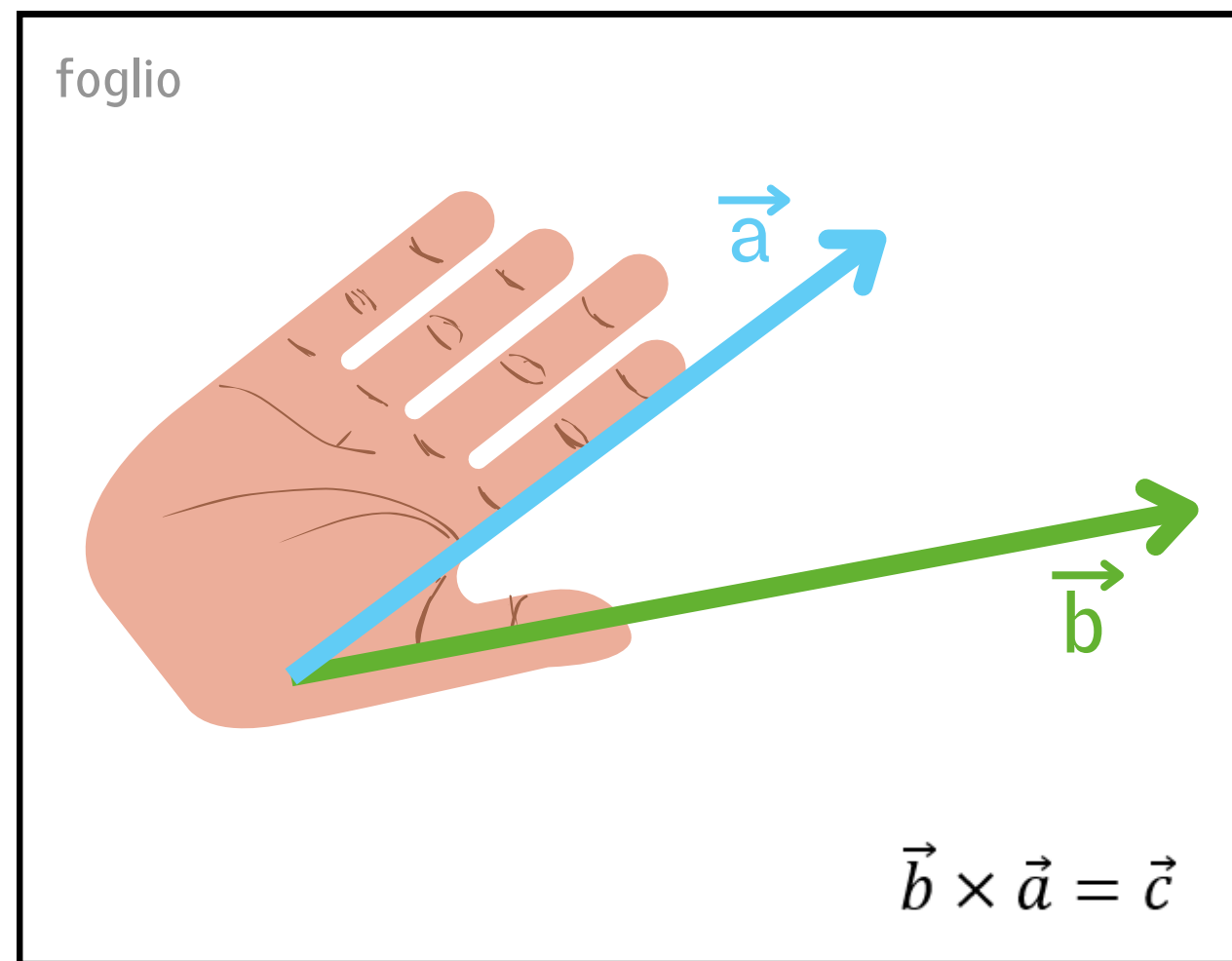
- il pollice nel verso del primo vettore (questa volta è il vettore $\vec{b}$);
- tutte le altre dita nel verso del secondo vettore (questa volta è il vettore $\vec{a}$).

Il palmo della mano è rivolto verso di noi, per cui il vettore prodotto sarà **uscente dal foglio**!

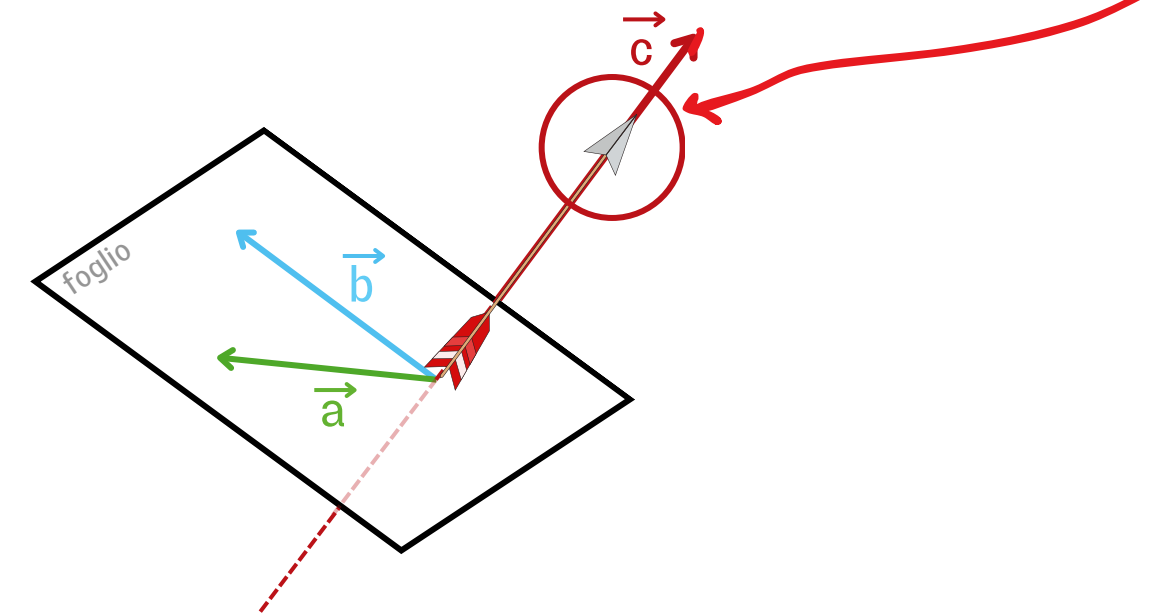
PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Come rappresentiamo il vettore prodotto questa volta?



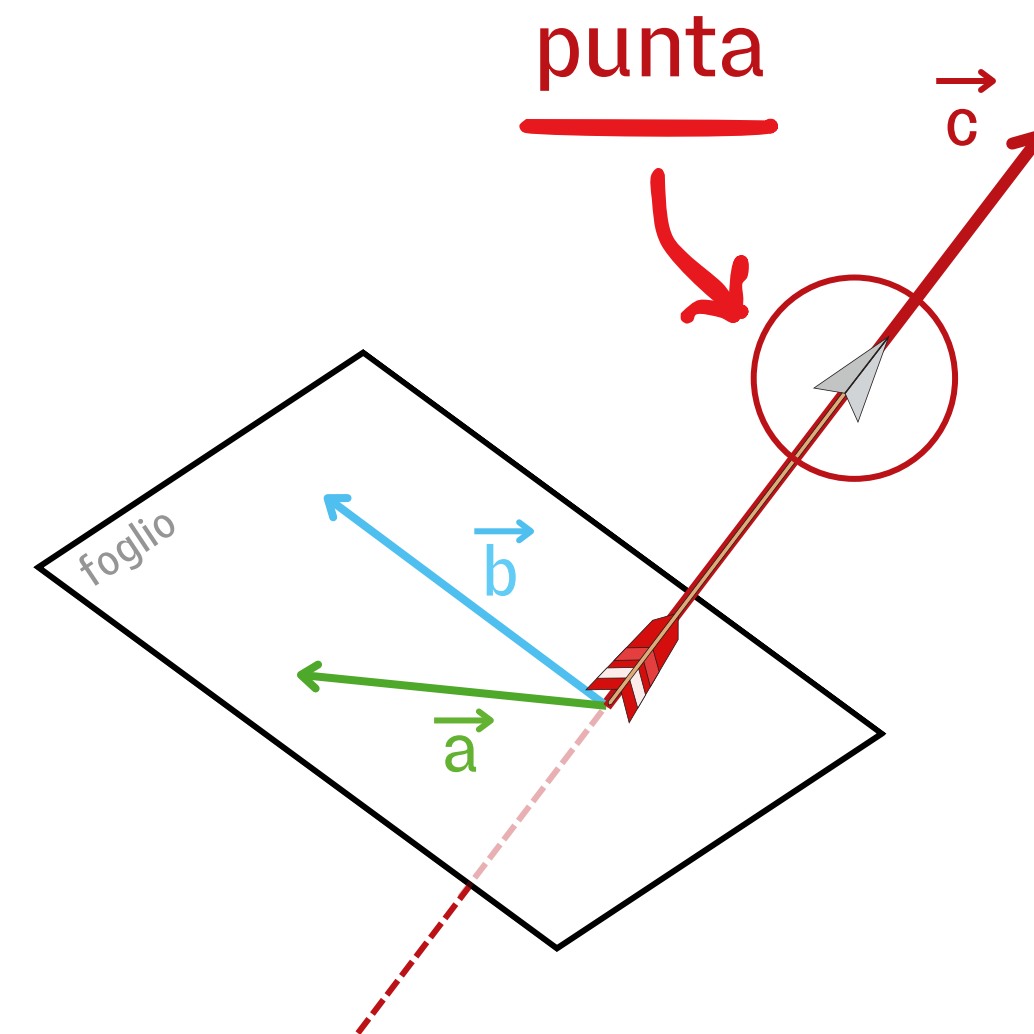
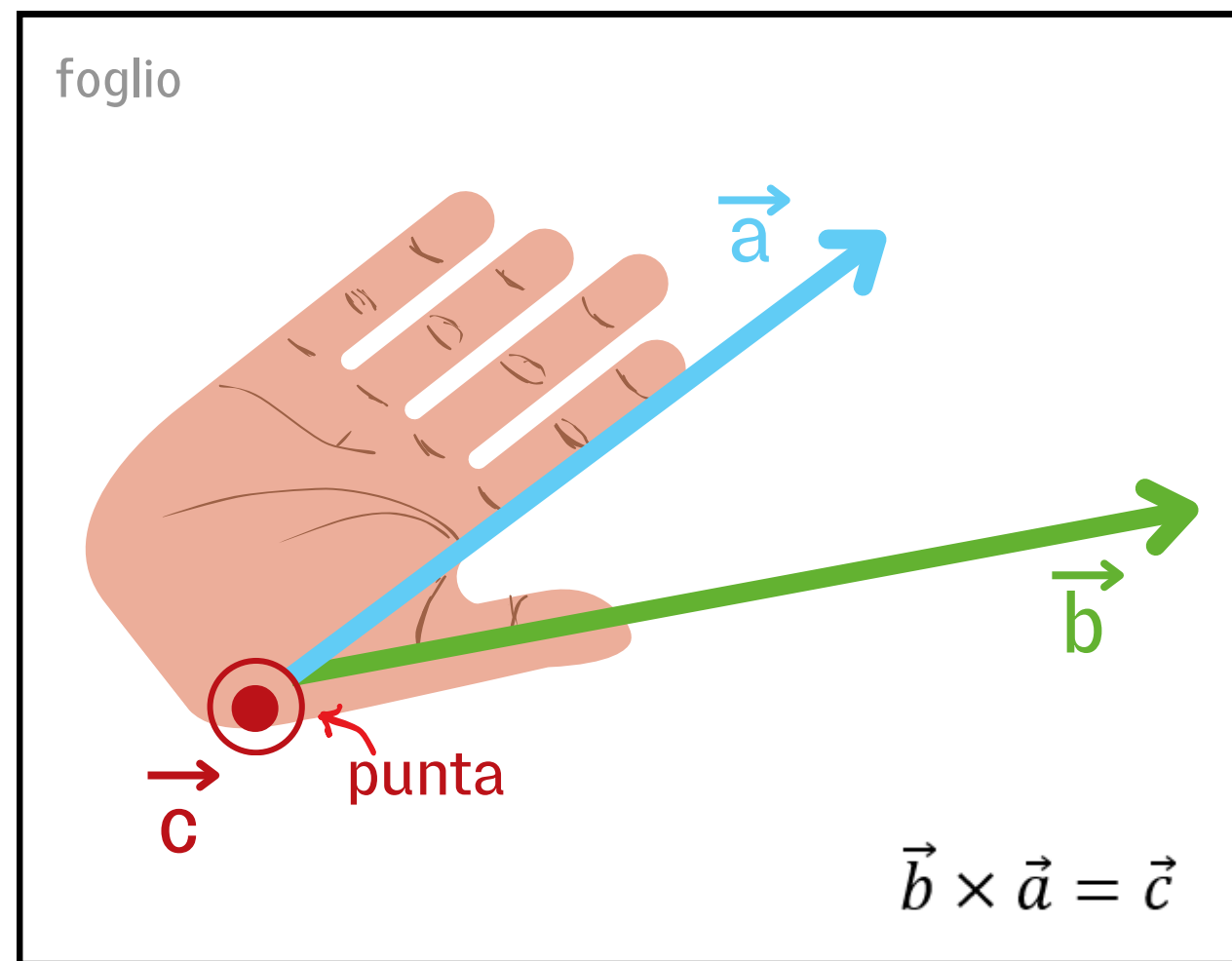
In questo caso la “freccia” è ancora perpendicolare al foglio ma è uscente... quindi se guardiamo il foglio dall’alto vedremo la sua punta!



PRODOTTO VETTORIALE

Definizione:

Rappresenteremo la punta con un “•”:



PRODOTTO VETTORIALE

Osservazione:

Con l'ultimo esempio, abbiamo capito non solo come rappresentare sul foglio il vettore prodotto a seconda che sia entrante o uscente, ma abbiamo anche capito che il **prodotto vettoriale non è commutativo!!!**

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

PRODOTTO SCALARE vs PRODOTTO VETTORIALE

Tabella valori:

Vi lascio con una tabella in cui sono indicati alcuni valori del coseno e del seno al variare dell'angolo compreso tra i due vettori.

(NON dovete impararla a memoria):

angolo α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
180°	0	-1

Fine lezione